Univerza v Ljubljani | Fakulteta za strojništvo

LADISK – Laboratorij za dinamiko strojev in konstrukcij

Lagrange - dve enakosti

Izr. prof. dr. M. Boltežar

15. junij 2007

V razvoju Lagrangeovih enačb smo uporabili dve enakosti, ki bosta tukaj dokazani.

1 Dokaz za prvo enakost

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \tag{1}$$

Izhajamo iz odvisnosti položajnega vektorja od posplošenih koordinat

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j), j = 1, ..., N. \tag{2}$$

Posplošene koordinate so seveda funkcije časa; $q_j = q_j(t)$. Nato položajni vektor odvajamo po času[1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_i) = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \tag{3}$$

Sedaj pa samo še parcialno odvajamo obe strani enačbe (3) po posplošeni hitrosti ter dobimo željeno povezavo

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \tag{4}$$

[1] Izraz velja za skleronomne sisteme, torej ko radij vektor ni eksplicitno odvisen od časa.

2 Dokaz za drugo enakost

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}. \tag{5}$$

Tudi sedaj izhajamo iz osnovne odvisnosti položajnega vektorja od posplošenih koordinat, enačba (2). Hitrost dobimo z odvajanjem izraza v enačbi (2) po času (3)[2]

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_N}\dot{q}_N + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \tag{6}$$

Sedaj izraz iz enačbe (6) parcialno odvajamo po j-ti posplošeni koordinati, ter dobimo

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_2 \partial q_j}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_N \partial q_j}\dot{q}_N + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j}. \tag{7}$$

Nato odvajajmo po času parcialno spremembo položajnega vektorja (2) po posplošeni koordinati, da dobimo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j \partial q_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j \partial q_N}\dot{q}_N + \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j \partial t}. \tag{8}$$

Ob predpostavki, da ima položajni vektor zvezna druga parcialna odvoda, lahko vrstni red parcialnega odvajanja zamenjamo, ter posledično izenačimo izraza v enačbah (7) in (8). S tem je druga trditev, enačba (5) dokazana.

[2] Gre za splošnejši zapis kakor v enačbi (3): krajevni vektor je lahko eksplicitno odvisen od časa.